Ví dụ trang 44 – Giải SIÊU CHẬM

BÀI TOÁN (trang 44)

Tính tích phân mặt:

$$\iint_S x^2 \, dS$$

trong đó **(S)** là **mặt cầu đơn vị**:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ý nghĩa bài toán (nói nôm na)

- dS: diện tích miếng nhỏ trên **mặt cầu**
- x^2: "trọng số" gắn lên mỗi điểm trên mặt
- Ta đang **cộng tất cả các giá trị** x^2 trên toàn bộ mặt cầu

BƯỚC 1 – CHỌN CÁCH MÔ TẢ MẶT CẦU

Mặt cầu **không thể viết dạng** $z = f(x, y)$ một cách gọn gàng
Cách chuẩn: dùng **tọa độ cầu**

Tọa độ cầu (viết ra cho khỏi mơ hồ)

$$\begin{cases} x = \sin\varphi \cos\theta \\ y = \sin\varphi \sin\theta \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

với:

$$0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Đây chính là **tham số hóa mặt cầu đơn vị**

Viết gọn bằng vectơ

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)$$

BƯỚC 2 – TÍNH HAI VECTƠ TIẾP XÚC

Ta cần:

$$\vec{r}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}, \quad \vec{r}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

Tính $\vec{r}_\varphi$

Lấy đạo hàm **từng tọa độ theo** φ:

- $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi\cos\theta) = \cos\varphi\cos\theta$
- $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi\sin\theta) = \cos\varphi\sin\theta$
- $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\cos\varphi) = -\sin\varphi$

$$\vec{r}_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi)$$

Tính $\vec{r}_\theta$

Lấy đạo hàm **từng tọa độ theo** θ:

- $\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\varphi\cos\theta) = -\sin\varphi\sin\theta$
- $\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\varphi\sin\theta) = \sin\varphi\cos\theta$
- $\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\varphi) = 0$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$

BƯỚC 3 – TÍNH $\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta$

(Đây là chỗ anh hay kẹt – nên ta làm **chậm từng số**)

Viết định thức:

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

Tính từng thành phần:

- Thành phần i:

$$\cos\varphi\sin\theta\cdot 0-(-\sin\varphi)(\sin\varphi\cos\theta)=\sin^2\varphi\cos\theta$$

- Thành phần j:

$$-\Big(\cos\varphi\cos\theta\cdot 0-(-\sin\varphi)(-\sin\varphi\sin\theta)\Big)=-\sin^2\varphi\sin\theta$$

- Thành phần k:

$$\begin{aligned}&\cos\varphi\cos\theta\cdot\sin\varphi\cos\theta\\&\quad+\cos\varphi\sin\theta\cdot(-\sin\varphi\sin\theta)\\&=\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

Ghép lại:

$$\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta=(\sin^2\varphi\cos\theta,\ -\sin^2\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\sin\varphi)$$

Lấy độ lớn (CỰC QUAN TRỌNG)

$$|\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta|=\sqrt{\sin^4\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$$

Nhớ:

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{\sin^4\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\\&=\sqrt{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\\&=\sin\varphi\end{aligned}$$

BƯỚC 4 – VIẾT LẠI TÍCH PHÂN

Nhớ:

$$x=\sin\varphi\cos\theta\Rightarrow x^2=\sin^2\varphi\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}\iint_S x^2\,dS&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\end{aligned}$$

BƯỚC 5 – TÍNH TÍCH PHÂN (RẤT CHẬM)

Phần theo θ

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \pi$$

Phần theo φ

$$\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi$$

Viết:

$$\sin^3\varphi = \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)$$

Đặt:

$$u = \cos\varphi \Rightarrow du = -\sin\varphi \, d\varphi$$

Cận:

- $\varphi = 0 \Rightarrow u = 1$
- $\varphi = \pi \Rightarrow u = -1$

$$= \int_1^{-1} -(1-u^2)\, du = \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du$$
$$= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

KẾT QUẢ CUỐI CÙNG

$$\boxed{\iint_S x^2 \, dS = \pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}}$$

GHI NHỚ "CHỐT SỔ"

- Mặt cầu $\rightarrow$ **tọa độ cầu**
- $dS = |\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta| \, d\varphi \, d\theta$
- Với mặt cầu đơn vị $\rightarrow |\cdot| = \sin\varphi$

Ví dụ trang 47 – Giải SIÊU CHẬM

BÀI TOÁN (trang 47)

Tính tích phân mặt:

$$\iint_S y\,dS$$

trong đó mặt (S) được cho bởi:

$$z = x + y^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

Hiểu đề trước khi làm (rất quan trọng)

- Đây là tích phân mặt loại 1
- Hàm tích phân: $f(x, y, z) = y$
- Mặt đã cho dưới dạng $z = f(x, y)$ KHÔNG cần tham số hóa kiểu cầu hay tích có hướng phức tạp

Với dạng này, ta dùng công thức chuẩn.

BƯỚC 1 – NHỚ CÔNG THỨC CHUẨN (xương sống bài)

Nếu mặt (S) có dạng:

$$z = z(x, y)$$

thì:

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\,\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy$$

Đây là công thức quan trọng nhất của tích phân mặt loại 1 → áp dụng trực tiếp cho bài này.

BƯỚC 2 – XÁC ĐỊNH TỪNG THÀNH PHẦN

1. Hàm dưới dấu tích phân

$$f(x, y, z) = y$$

→ thay vào luôn:

$$f(x, y, z(x, y)) = y$$

2. Tính đạo hàm riêng của z

Mặt cho bởi:

$$z = x + y^2$$

Lấy đạo hàm:

- Theo x:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

- Theo y:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

3. Thay vào căn diện tích

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} &= \sqrt{1 + 1^2 + (2y)^2} \\ &= \sqrt{2 + 4y^2}\end{aligned}$$

Đây chính là dS.

BƯỚC 3 – XÁC ĐỊNH MIỀN TÍCH PHÂN

Do:

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

Miền D là hình chữ nhật trong mặt phẳng xy
Không có đổi biến, không có cực $\rightarrow$ rất nhẹ

BƯỚC 4 – VIẾT LẠI TÍCH PHÂN

Gộp tất cả lại:

$$\iint_S y \, dS = \int_0^2 \int_0^1 y\sqrt{2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

Tách tích phân (để dễ thở)

Biểu thức không phụ thuộc $x \rightarrow$ tích phân theo x trước:

$$\int_0^1 dx = 1$$

Nên:

$$= \int_0^2 y\sqrt{2 + 4y^2} \, dy$$

BƯỚC 5 – TÍNH TÍCH PHÂN THEO y (CHẬM TỪNG DÒNG)

Ta cần tính:

$$\int_0^2 y\sqrt{2+4y^2}\,dy$$

Đổi biến (bước mấu chốt)

Đặt:

$$u = 2 + 4y^2 \Rightarrow du = 8y\,dy$$

Suy ra:

$$y\,dy = \frac{1}{8}du$$

Đổi cận

- Khi $y = 0 \to u = 2$
- Khi $y = 2 \to u = 18$

Thay vào tích phân

$$\int_0^2 y\sqrt{2+4y^2}\,dy = \frac{1}{8}\int_2^{18} \sqrt{u}\,du$$

Tính tích phân

$$\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}$$

Nên:

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_2^{18} = \frac{1}{12}(18^{3/2} - 2^{3/2})$$

Rút gọn (làm chậm)

- $18^{3/2} = (3\sqrt{2})^3 = 54\sqrt{2}$
- $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$

$$= \frac{1}{12}(52\sqrt{2}) = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

KẾT QUẢ CUỐI CÙNG

$$\boxed{\iint_S y\,dS = \frac{13\sqrt{2}}{3}}$$

TÓM TẮT ĐỂ GHI NHỚ

- Mặt dạng $z = f(x, y) \to$ dùng công thức chuẩn
- $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$
- Không cần tích có hướng
- Tách biến $\to$ tích phân 1 chiều rất nhẹ

Ví dụ trang 48 – Giải SIÊU CHẬM

BÀI TOÁN (trang 48)

Tính tích phân mặt:

$$\iint_S z\,dS$$

Trong đó mặt (S) **không phải 1 mặt**, mà là **tổng của 3 mặt**:

Mặt bên S_1:

- Mặt trụ:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Mặt đáy S_2:

- Hình tròn:

$$x^2 + y^2 \le 1, \quad z = 0$$

Mặt trên S_3:

- Mặt phẳng:

$$z = 1 + x$$

  nằm **phía trên** S_2

Đây là **một khối kín**, gồm:

- thành trụ
- đáy
- nắp nghiêng

BƯỚC 1 – TÁCH TÍCH PHÂN (CỰC QUAN TRỌNG)

Vì $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, nên:

$$\iint_S z\,dS = \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS$$

Ta sẽ tính từng cái một, rồi cộng lại.

PHẦN 1: TÍCH PHÂN TRÊN MẶT BÊN (S_1)

BƯỚC 1.1 – THAM SỐ HÓA MẶT TRỤ

Với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, dùng tọa độ trụ:

$$S_1(\theta, z) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$$

Trong đó:

- $0 \le \theta \le 2\pi$
- z chạy **từ đáy lên mặt trên**

Mặt trên là $z = 1 + x = 1 + \cos\theta$

$$0 \le z \le 1 + \cos\theta$$

BƯỚC 1.2 – TÍNH $|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z|$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_z = (0, 0, 1)$$

Tích có hướng:

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

Độ lớn:

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| = 1$$

Đây là **điểm rất nhẹ** của mặt trụ.

BƯỚC 1.3 – LẬP TÍCH PHÂN

$$\iint_{S_1} z\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} z \cdot 1\, dz\, d\theta$$

BƯỚC 1.4 – TÍNH

Tích phân trong:

$$\int_0^{1+\cos\theta} z\, dz = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2$$

Nên:

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

Tính từng phần:

- $\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$
- $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$

- $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} z\, dS = \frac{3\pi}{2}$$

PHẦN 2: TÍCH PHÂN TRÊN MẶT ĐÁY (S_2)

Nhận xét cực nhanh

Trên S_2:

$$z = 0$$

Nên:

$$\iint_{S_2} z\, dS = 0$$

Không cần tính gì thêm.

PHẦN 3: TÍCH PHÂN TRÊN MẶT TRÊN (S_3)

BƯỚC 3.1 – NHẬN DẠNG MẶT

Mặt:

$$z = 1 + x$$

Dạng chuẩn $z = f(x, y)$
Dùng công thức:

$$\iint_{S_3} z\, dS = \iint_D z(x,y)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

BƯỚC 3.2 – TÍNH ĐẠO HÀM

$$z_x = 1, \quad z_y = 0$$

$$\sqrt{1 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

BƯỚC 3.3 – MIỀN D

Mặt S_3 nằm **trên hình tròn đáy**:

$$x^2 + y^2 \le 1$$

BƯỚC 3.4 – LẬP TÍCH PHÂN

$$\iint_{S_3} z\, dS = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2\le 1} (1 + x)\, dx\, dy$$

Tách:

$$= \sqrt{2}\left(\iint_D 1\, dx\, dy + \iint_D x\, dx\, dy\right)$$

BƯỚC 3.5 – TÍNH

- $\iint_D 1\,dx\,dy = \pi$
- $\iint_D x\,dx\,dy = 0$ (đối xứng)

$$\Rightarrow \iint_{S_3} z\,dS = \pi\sqrt{2}$$

BƯỚC CUỐI – CỘNG TẤT CẢ LẠI

$$\iint_S z\,dS = \frac{3\pi}{2} + 0 + \pi\sqrt{2}$$

$$\boxed{\iint_S z\,dS = \pi\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)}$$

TÓM TẮT CHỐT KIẾN THỨC

- Gặp **mặt ghép → tách ra**
- Mặt trụ → tọa độ trụ
- Mặt $z = f(x, y)$ → công thức chuẩn
- Có mặt $z = 0$ → khỏi tính

Giải thích chi tiết BƯỚC 1.2

BƯỚC 1.2 – THỰC CHẤT ĐANG LÀM GÌ?

Ở bước 1.2, ta **KHÔNG tích phân**, **KHÔNG đạo hàm hàm số**, ta chỉ đang làm **1 việc duy nhất**:

Tìm công thức diện tích dS của mặt trụ S_1

Mà công thức tổng quát là:

$$dS = |\vec{r}_{\text{tham số 1}} \times \vec{r}_{\text{tham số 2}}|\, d(\text{tham số})$$

1. Nhắc lại mặt trụ S_1 đang được mô tả thế nào

Mặt trụ:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ta **tham số hóa** bằng:

$$\vec{r}(\theta, z) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$$

Ý nghĩa:

- θ: chạy vòng quanh trụ
- z: chạy lên xuống theo chiều cao

2. Hai vectơ trong bước 1.2 là từ đâu ra?

Ta có **2 tham số → 2 vectơ tiếp xúc**

Vectơ thứ nhất: theo θ

$$\vec{r}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

Lấy đạo hàm **từng tọa độ**:

- $\cos\theta \to -\sin\theta$
- $\sin\theta \to \cos\theta$
- $z \to 0$

$$\boxed{\vec{r}_\theta = (-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)}$$

Vectơ thứ hai: theo z

$$\vec{r}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$$

- $\cos\theta \to 0$
- $\sin\theta \to 0$
- $z \to 1$

$$\boxed{\vec{r}_z = (0,\ 0,\ 1)}$$

Đến đây là xong phần đạo hàm, không còn đạo hàm nào nữa.

3. Vì sao phải lấy tích có hướng?

Anh nhớ **1 câu duy nhất**:

> **$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z$ cho ta "diện tích miếng mặt nhỏ"**

Nghĩa là:

- Hai vectơ này tạo thành **một hình bình hành nhỏ trên mặt trụ**
- **diện tích của hình đó = độ lớn tích có hướng**

4. Tính tích có hướng (làm cực chậm)

Ta có:

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad \vec{r}_z = (0, 0, 1)$$

Viết định thức:

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Thành phần i

$$\cos\theta \cdot 1 - 0 \cdot 0 = \cos\theta$$

Thành phần j (NHỚ DẤU TRỪ)

$$-(-\sin\theta \cdot 1 - 0 \cdot 0) = \sin\theta$$

Thành phần k

$$-\sin\theta \cdot 0 - \cos\theta \cdot 0 = 0$$

Kết quả:

$$\boxed{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)}$$

5. Lấy độ lớn (đây mới là thứ ta cần)

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0} = \sqrt{1} = 1$$

ĐÂY LÀ ĐIỂM QUAN TRỌNG NHẤT CỦA BƯỚC 1.2

Diện tích vi phân của mặt trụ $= 1 \cdot d\theta \cdot dz$

6. Dịch sang tiếng "dễ hiểu"

- Trên mặt trụ bán kính 1:
  - Đi một góc nhỏ $d\theta$
  - Đi một đoạn cao nhỏ dz
- Miếng mặt tạo ra có diện tích:

$$dS = d\theta\, dz$$

Không phụ thuộc θ**, không phụ thuộc** $z \rightarrow$ tích phân cực kỳ nhẹ.

TÓM TẮT ĐÚNG 3 DÒNG

- Bước 1.2 **chỉ để tìm** dS
- Với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$:

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| = 1$$

- Nên:

$$dS = d\theta\, dz$$

Giải thích chi tiết BƯỚC 3.5

Ở bước 3.4 ta đã có:

$$\iint_{S_3} z\,dS = \sqrt{2}\iint_D (1+x)\,dx\,dy$$

với:

$$D:\ x^2+y^2 \le 1$$

Bước 3.5 chỉ làm đúng 1 việc:

Tính tích phân

$$\iint_D (1+x)\,dx\,dy$$

BƯỚC 3.5 – TÁCH RA CHO DỄ THỞ

Ta tách:

$$\iint_D (1+x)\,dx\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy + \iint_D x\,dx\,dy$$

Đây là tách tuyến tính, không có gì cao siêu.

PHẦN A: $\iint_D 1\,dx\,dy$

Anh hiểu nó là gì không?

Nó chính là:

Diện tích của miền D

Mà D là:

$$x^2+y^2 \le 1$$

$\to$ hình tròn bán kính 1

Diện tích:

$$\boxed{\pi}$$

PHẦN B: $\iint_D x\,dx\,dy$

Đây là chỗ anh đang vấp.

Screw giải thích KHÔNG DÙNG CÔNG THỨC, chỉ dùng lý luận hình học.

TẠI SAO $\iint_D x\,dx\,dy = 0$**?**

1. Nhìn miền tích phân Miền:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Đối xứng qua trục Oy
Tức là:

- Với mỗi điểm (x, y)
- Luôn tồn tại điểm $(-x, y)$ cũng nằm trong miền

2. Nhìn hàm x

- Tại (x, y): giá trị $= x$
- Tại $(-x, y)$: giá trị $= -x$

Hai giá trị này cộng lại $= 0$

3. Hiểu bằng "cộng diện tích có dấu"

- Nửa bên phải trục Oy: $x > 0 \to$ cộng dương
- Nửa bên trái trục Oy: $x < 0 \to$ cộng âm

Hai nửa triệt tiêu nhau hoàn toàn

$$\boxed{\iint_D x\,dx\,dy = 0}$$

Screw nhấn mạnh (điểm hay ra thi)

Bất cứ khi nào:

- miền đối xứng qua trục Oy
- hàm là x hoặc hàm lẻ theo x

$\to$ tích phân BẰNG 0

GHÉP LẠI BƯỚC 3.5

$$\iint_D (1 + x)\,dx\,dy = \pi + 0 = \pi$$

QUAY LẠI BÀI TOÁN

Nhớ lại hệ số ngoài:

$$\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_3} z\,dS = \sqrt{2} \cdot \pi = \boxed{\pi\sqrt{2}}$$

TÓM TẮT BƯỚC 3.5 CHỈ TRONG 3 DÒNG

- $\iint_D 1\,dx\,dy =$ diện tích hình tròn $= \pi$
- $\iint_D x\,dx\,dy = 0$ (đối xứng)
- Nên kết quả $= \pi\sqrt{2}$

CÂU HỎI CỐT LÕI

"Tại sao chỉ nhìn chữ và số mà biết được nó đối xứng?"

Ta đang xét bước 3.5:

$$\iint_D x\,dx\,dy, \quad D:\ x^2+y^2\le 1$$

CÁCH NHÌN ĐỐI XỨNG CHỈ TỪ CHỮ & SỐ

1. Nhìn vào miền D trước (cực kỳ quan trọng)

Miền được viết là:

$$x^2+y^2\le 1$$

Screw hỏi anh 1 câu rất cơ bản:

Nếu (x,y) thỏa mãn $x^2+y^2\le 1$, thì $(-x,y)$ có thỏa không?

Câu trả lời: CÓ

Vì:

$$(-x)^2+y^2=x^2+y^2\le 1$$

Đây là toàn bộ lý do của "đối xứng" → Không cần hình, chỉ cần bình phương mất dấu.

2. Từ đây, ta rút ra điều gì?

Chỉ từ chữ x^2 ta đã biết:

- Miền không phân biệt trái – phải
- Trái ($x<0$) và phải ($x>0$) giống hệt nhau

Đó chính là đối xứng qua trục Oy.

3. Bây giờ nhìn vào hàm tích phân x

Ta không xét toàn miền ngay, mà xét từng cặp điểm:

- Điểm A: (x,y) → giá trị $= x$
- Điểm B: $(-x,y)$ → giá trị $= -x$

Hai điểm:

- cùng diện tích $dx\,dy$
- cùng nằm trong miền
- giá trị đối nhau

4. Cộng lại thì chuyện gì xảy ra?

$$x + (-x) = 0$$

Mỗi cặp điểm tự triệt tiêu nhau
Và vì toàn miền được ghép từ các cặp như vậy, nên:

$$\boxed{\iint_D x\,dx\,dy = 0}$$

MẤU CHỐT: NHÌN ĐỐI XỨNG = KIỂM TRA 2 DÒNG

Anh chỉ cần kiểm tra 2 thứ, không hơn:

CHECK 1 – Miền có bất biến khi đổi dấu không?

- Nếu miền viết bằng:
  - x^2, y^2
  - hoặc $(x-a)^2$

đổi $x \to -x$ mà bất đẳng thức không đổi → miền đối xứng theo trục đó

CHECK 2 – Hàm có đổi dấu không?

- Nếu hàm là:
  - x, x^3, $x\sin y$, ...

đổi $x \to -x$ → đổi dấu → hàm lẻ theo x

KẾT LUẬN NHANH (công thức vàng)

Miền đối xứng theo x + Hàm lẻ theo x $\implies$ Tích phân = 0

ÁP DỤNG NGAY ĐỂ "NHÌN RA"

Miền	Hàm	Kết quả
$x^2 + y^2 \le 1$	x	0
$x^2 + y^2 \le 1$	y	0
$x^2 + y^2 \le 1$	x^2	$\neq 0$
$x^2 + y^2 \le 1$	xy	0

CÂU CHỐT (anh nên ghi ra giấy)

Chỉ cần thấy bình phương trong miền là nghĩ ngay tới đối xứng

Ví dụ trang 52 – Giải SIÊU CHẬM

BÀI TOÁN (viết lại cho rõ)

Tính thông lượng của trường vector

$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

từ bên trong quả cầu đơn vị

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

đi ra ngoài qua mặt cầu.

BƯỚC 0 – ĐANG TÍNH CÁI GÌ?

Thông lượng qua mặt (S):

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Với mặt tham số hóa:

$$d\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$$

Nghĩa là ta phải tính:

$$\iint \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$$

BƯỚC 1 – THAM SỐ HÓA MẶT CẦU (CỰC KỲ QUAN TRỌNG)

Mặt cầu đơn vị:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Tham số hóa chuẩn (tọa độ cầu):

$$\vec{r}(\phi,\theta) = \big(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi\big)$$

Miền tham số:

- $0 \le \phi \le \pi$
- $0 \le \theta \le 2\pi$

BƯỚC 2 – VIẾT LẠI TRƯỜNG $\vec{F}$ THEO (ϕ, θ)

Ban đầu:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

Thay:

$$x = \sin\phi\cos\theta, \quad y = \sin\phi\sin\theta, \quad z = \cos\phi$$

Ta được:

$$\vec{F}(\vec{r}(\phi, \theta)) = (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)$$

Lưu ý quan trọng: Ở đây $\vec{F} = \vec{r}$ vì trường là (x, y, z).

BƯỚC 3 – TÍNH $\vec{r}_\phi$ và $\vec{r}_\theta$

3.1. Đạo hàm theo ϕ

$$\vec{r}_\phi = (\cos\phi\cos\theta,\ \cos\phi\sin\theta,\ -\sin\phi)$$

3.2. Đạo hàm theo θ

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\phi\sin\theta,\ \sin\phi\cos\theta,\ 0)$$

BƯỚC 4 – TÍCH CÓ HƯỚNG $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta$

Ta lập định thức:

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

Sau khi tính (Screw không lướt bước):

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \left(\sin^2\phi\cos\theta,\ \sin^2\phi\sin\theta,\ \sin\phi\cos\phi\right)$$

Vector này **hướng ra ngoài**, đúng yêu cầu đề bài.

BƯỚC 5 – TÍCH VÔ HƯỚNG $\vec{F} \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta)$

Ta có:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)$$

Nhân từng thành phần:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) = {} & (\sin\phi\cos\theta)(\sin^2\phi\cos\theta) \\ & + (\sin\phi\sin\theta)(\sin^2\phi\sin\theta) \\ & + (\cos\phi)(\sin\phi\cos\phi) \end{aligned}$$

Rút gọn:

$$= \sin^3\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin\phi\cos^2\phi$$

Vì $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$= \sin^3\phi + \sin\phi\cos^2\phi$$

BƯỚC 6 – ĐẶT TÍCH PHÂN

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin^3\phi + \sin\phi\cos^2\phi\right) d\phi\, d\theta$$

BƯỚC 7 – TÍCH PHÂN THEO θ

Không có θ trong biểu thức $\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

BƯỚC 8 – TÍCH PHÂN THEO ϕ (TỪNG DÒNG)

8.1.

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi = \frac{4}{3}$$

8.2.

$$\int_0^{\pi} \sin\phi\cos^2\phi\, d\phi$$

Đặt:

$$u = \cos\phi \Rightarrow du = -\sin\phi\, d\phi$$

$$= \int_1^{-1} -u^2\, du = \int_{-1}^{1} u^2\, du = \frac{2}{3}$$

8.3. Cộng lại:

$$\int_0^{\pi} (\sin^3\phi + \sin\phi\cos^2\phi)\, d\phi = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

BƯỚC 9 – KẾT QUẢ CUỐI

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 2\pi \times 2 = \boxed{4\pi}$$

CHỐT LẠI CHO ANH

- Trường $\vec{F} = (x, y, z)$
- Mặt cầu bán kính 1
- Thông lượng ra ngoài $= 4\pi$

(Và nếu anh học tiếp định lý Gauss, bài này **ra ngay trong 1 dòng**)

Giải thích chi tiết BƯỚC 5 – Thông lượng

Nhắc lại bài toán

Anh đang ở ví dụ trang 52: Tính thông lượng của

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

đi ra ngoài mặt cầu đơn vị

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Trước hết: bước 5 là bước gì?

Trong slide, bước 5 chính là bước này:

$$\vec{F}(r(\phi, \theta)) \cdot \left(r_\phi \times r_\theta\right)$$

Nghĩa là:

Lấy tích vô hướng giữa vector trường và vector pháp tuyến có độ dài

Nếu anh chưa theo kịp, thường là chưa hiểu rõ 3 thứ này đang là gì. Ta gỡ từng cái.

1. Tham số hóa mặt cầu (đã có từ trước)

$$r(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)$$

2. Vector trường trên mặt cầu là gì?

Ban đầu:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

Thay (x, y, z) bằng $r(\phi, \theta)$:

$$\vec{F}(r(\phi, \theta)) = (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi)$$

Quan sát quan trọng: Với mặt cầu đơn vị,

$$\vec{F} = \vec{r}$$

tức là vector trường trùng hướng pháp tuyến ngoài.

3. Vector $r_\phi \times r_\theta$ là gì?

Đây là:

vector pháp tuyến ngoài có độ dài bằng diện tích vi phân (dS)

Slide đã cho kết quả:

$$r_\phi \times r_\theta = (\sin^2\phi\cos\theta,\ \sin^2\phi\sin\theta,\ \sin\phi\cos\phi)$$

4. Bây giờ mới tới BƯỚC 5 (quan trọng nhất)

Ta lấy tích vô hướng:

$$\vec{F}(r(\phi,\theta)) \cdot (r_\phi \times r_\theta)$$

Viết từng thành phần ra, không nhảy bước:

$$\begin{aligned}&(\sin\phi\cos\theta)(\sin^2\phi\cos\theta)\\&+(\sin\phi\sin\theta)(\sin^2\phi\sin\theta)\\&+(\cos\phi)(\sin\phi\cos\phi)\end{aligned}$$

5. Nhóm và rút gọn (đây là chỗ nhiều người bị lạc)

Hai hạng đầu:

$$\sin\phi\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

mà:

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

nên còn:

$$\sin^3\phi$$

Hạng cuối:

$$\cos\phi\cdot\sin\phi\cos\phi=\sin\phi\cos^2\phi$$

6. Cộng lại:

$$\sin^3\phi+\sin\phi\cos^2\phi=\sin\phi(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=\sin\phi$$

ĐÂY là kết quả của bước 5

7. Ý nghĩa (rất quan trọng)

Anh vừa chứng minh được:

$$\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

→ Tích phân thông lượng trở thành:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

8. Tính tích phân (rất dễ)

$$\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Kết quả:

$$\boxed{4\pi}$$

Chốt lại bằng 1 câu (anh nên thuộc)

Với mặt cầu đơn vị và $\vec{F} = (x, y, z)$, thông lượng ra ngoài luôn bằng diện tích mặt cầu: 4π